Cálculo Matricial

EDIÇÃO, DISTRIBUIÇÃO E VENDAS
SÍLABAS & DESAFIOS - UNIPESSOAL LDA.
NIF: 510212891
www.silabas-e-desafios.pt
info@silabas-e-desafios.pt

Sede:
Rua Dorília Carmona, nº4, 4º Dto
8000-316 Faro
Telefone/Fax: 289 805 399
Encomendas: encomendar@silabas-e-desafios.pt

TÍTULO: Cálculo Matricial

AUTORES: Margarida Carvalho, Hermínia Carvalho e Teresa Ferreira

1.ª edição, 200 Exemplares

ISBN: 978-989-99114-0-6
Depósito Legal:

Edição: Sílabas & Desafios, Unipessoal Lda.
Pré-impressão, impressão e acabamentos: Gráfica Comercial, Loulé.

Capa: Pedro Carvalho – www.overcover.pt

SÍLABAS & DESAFIOS

Cálculo Matricial

Margarida Carvalho e **Teresa Ferreira** são docentes, com a categoria de Professor Adjunto, do Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa (ISCAL) do Instituto Politécnico de Lisboa (IPL).

Hermínia Carvalho, recentemente aposentada, foi durante mais de 20 anos docente do ISCAL-IPL .

Aos alunos,

"*Não importa que vás devagar,*
desde que não pares. "

Confúcio
(551 a.C. - 479 a.C.)

PREFÁCIO

A teoria das matrizes é um dos temas abordados nas unidades curriculares de Álgebra Linear ou Matemática, dependendo da instituição, no primeiro ano dos cursos de Engenharias, Ciências Empresariais e, naturalmente, Matemática.

A finalidade deste livro é a de apresentar uma revisão dos conceitos elementares sobre matrizes, numa linguagem matricial que é comum à maioria das instituições de ensino superior, e fornecer aos alunos um conjunto considerável de exercícios resolvidos que lhes permita uma boa consolidação das técnicas de cálculo matricial para as aplicações inerentes a este tema.

Nos capítulos 1 e 3, é apresentado um resumo da teoria subjacente ao tema das matrizes, bem como exemplos associados. Nos capítulos 2 e 4, a teoria é concretizada através dos exercícios, detalhadamente resolvidos, para ajudar os alunos na transição entre a teoria e a prática.

M. Carvalho, H. Carvalho e T. Ferreira

Outubro 2014

CONTEÚDO

Páginas intencionalmente omitidas.

NOTA: *Colocaremos sempre as operações a efetuar junto da linha que vai ser substituída.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 + 4\,\ell_1]{} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 2 \\ 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 - 2\,\ell_1 \\ \ell_3 - 3\,\ell_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 2\,\ell_2]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 \\ 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 + 2\,\ell_1 \\ \ell_3 - 4\,\ell_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 2\,\ell_2]{} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_1]{} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 3\,\ell_2]{}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & 2 & -3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

É importante referir que a forma de escada <u>não é única</u>. Podemos obter matrizes em escada diferentes, dependendo das operações efetuadas, tendo estas, no entanto, igual número de pivots (não necessariamente os mesmos pivots).

Definição 1.15 *(Equivalência de matrizes)*

*Duas matrizes, **A** e **B**, dizem-se **equivalentes por linhas**, se se obtém uma, através da outra, por aplicação de um número finito de operações elementares às linhas. Escreve-se* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Trata-se de uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, por ser reflexiva ($\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$), simétrica ($\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$) e transitiva ($\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, então $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$).

Para reduzir qualquer matriz à sua forma condensada, utiliza-se um método que se baseia no método de eliminação de Gauss, introduzindo mais uma fase, chamada ascendente, em que se eliminam também os elementos acima dos pivots.

MÉTODO DE GAUSS - JORDAN

Depois de colocar a matriz na forma de escada, inicia-se a fase ascendente, fixando o último pivot, que poderá ser da última linha ou não, dependendo da existência de linhas nulas na forma de escada. À custa deste, anulamos todos os elementos acima. Prosseguimos para o pivot da linha anterior, anulando os elementos acima e assim sucessivamente até ao pivot da primeira linha. Em seguida dividimos cada linha pelo respetivo pivot, ficando todos iguais a 1.

A matriz final obtida, na forma condensada, é única, independentemente das operações envolvidas no processo.

Exemplo 1.13 *Determinemos a forma condensada das matrizes* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 - \ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\ell_3 - \ell_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Fase ascendente

$$\begin{array}{c} 3\,\ell_1 - \ell_3 \\ 3\,\ell_2 + \ell_3 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \ell_1 + 3\,\ell_2 \\ \longrightarrow \\ \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \overrightarrow{\frac{1}{6}\,\ell_1} \\ -\frac{1}{3}\,\ell_2 \\ \frac{1}{3}\,\ell_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \ell_2 \leftrightarrow \ell_1 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2\,\ell_1 - \ell_2 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \overrightarrow{\frac{1}{4}\,\ell_1} \\ \frac{1}{2}\,\ell_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \\ \ell_4 \leftrightarrow \ell_1 \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \ell_2 - 3\,\ell_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \ell_3 + \ell_2 \\ 3\,\ell_4 + \ell_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \\ \frac{1}{5}\,\ell_4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \\ 2\,\ell_4 + \ell_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2\,\ell_1 + \ell_4 \\ 2\,\ell_2 - 3\,\ell_4 \\ \ell_3 - \ell_4 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \ell_1 + \ell_3 \\ \ell_2 - \ell_3 \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3\,\ell_1 + \ell_2 \\ \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array}$$

Páginas intencionalmente omitidas.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\boxed{1} & -1 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\underset{\substack{\ell_2+2\,\ell_1\\ \ell_3-\ell_1}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \boxed{-1} & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\underset{\ell_3+2\,\ell_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$r(\mathbf{B})=3$, que é igual ao número de linhas e também ao número de colunas, pelo que, quer o conjunto das linhas, quer o conjunto das colunas de $\mathbf{B}$, são linearmente independentes.

Matriz $\mathbf{C}$:

Como a matriz $\mathbf{C}$ tem dimensão 3×4, teremos $r(\mathbf{C})\leq 3$, que é inferior ao número de colunas, o conjunto das colunas é linearmente dependente. Quanto às linhas, vai depender se a característica atinge, ou não, o valor 3.

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\boxed{-1} & -1 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\underset{\ell_2+\ell_1}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\underset{\ell_3\leftrightarrow\ell_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$r(\mathbf{C})=3$ e sendo igual ao número de linhas, concluimos que o conjunto das linhas é linearmente independente. ■

1.8 Inversa de uma Matriz Quadrada

Definição 1.19 *(Inversa)*

Uma matriz $\mathbf{A}_n$ diz-se invertível ou não singular, se existir uma matriz, que se representa por $\mathbf{A}^{-1}$, da mesma ordem de $\mathbf{A}$ e tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}_n$. Se não existir tal matriz, $\mathbf{A}$ diz-se singular ou não invertível.

Exemplo 1.19

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2 \qquad e$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

então, as matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são inversas entre si.* ■

PROPRIEDADES

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes de ordem n, invertíveis, então

- $\mathbf{A}^{-1}$ é invertível e $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$;
- $\mathbf{AB}$ é invertível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
- $\mathbf{kA}$ é invertível e $(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{k}\,\mathbf{A}^{-1}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\mathbf{A}^\intercal$ é invertível e $(\mathbf{A}^\intercal)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\intercal$;
- $\mathbf{A}^n$ é invertível e $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.1 *Uma dada matriz* $\mathbf{A}_n$ *é invertível se, e só se,* $r(\mathbf{A}) = n$.

Significa que se uma dada matriz $\mathbf{A}$ é invertível, esta é equivalente por linhas à matriz identidade da mesma ordem.

Existindo duas matrizes tais que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$, temos

$$(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}\,\mathbf{C} = \mathbf{C} \;\text{ e }\; \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{B}\,\mathbf{I} = \mathbf{B},$$

pelo que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Então, basta determinar uma inversa lateral, ou seja, determinar $\mathbf{A}^{-1}$ que satisfaz $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.

Teorema 1.2 *A inversa de uma matriz quadrada, se existir, é única.*

Páginas intencionalmente omitidas.

Exemplo 1.23 *Calculemos o determinante de cada uma das matrizes* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$*, usando o teorema de Laplace.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cálculo do determinante de $\mathbf{A}$

Quer a linha 3, quer a coluna 3, têm um elemento nulo. Assim, é indiferente escolhermos uma ou a outra. Aplicando o teorema de Laplace, por exemplo, à linha 3:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \mathbf{2}\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{2}\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-2-0)+2\times(3-2) = -4+2 = -2.$$

Cálculo do determinante de $\mathbf{B}$

A linha 2 tem dois zeros, pelo que é a melhor escolha para o desenvolvimento.

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{\mathbf{-1}\times(-1)^{2+1}}_{=1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = 2(-1)-1\times1 = -3$$

■

Embora importante, o teorema de Laplace é um método que se revela pouco eficiente para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem superior a 3, pois obriga a um esforço de cálculos muito grande. Por exemplo, para uma matriz de ordem 5, se não existirem elementos nulos, há que determinar 5 determinantes 4×4. Quando as matrizes são de ordem elevada, apenas no caso de matrizes esparsas (matrizes que contêm um número elevado de elementos nulos), poderemos considerar a aplicação do teorema de Laplace, ou então combiná-lo com outro processo, como veremos mais adiante.

Uma alternativa eficiente para o cálculo de determinantes, é utilizar as suas próprias propriedades (pág. 35). Por exemplo, podemos transformar a matriz numa matriz triangular por meio das operações elementares, cujo determinante sabemos ser o produto dos seus elementos principais. No entanto, é necessária alguma precaução devido à aplicação de operações que alteram o determinante.

- A <u>troca de filas entre si</u>; neste caso, multiplicamos o determinante da matriz obtida por -1.
- A multiplicação da linha <u>que se vai substituir, por $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$</u>; neste caso, multiplicamos o determinante da matriz obtida por $\frac{1}{k}$.

Realçamos que, de acordo com as propriedades enunciadas, o determinante só se altera, se a multiplicação pela constante k ocorrer na linha que vamos substituir e não se for à outra que vamos adicionar.

Exemplo 1.24 *Calculemos o determinante de cada uma das matrizes* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$, *usando as propriedades dos determinantes.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>*Cálculo do determinante de* $\mathbf{A}$*:*</u>

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{c_2 \leftrightarrow c_1}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{2}\,\ell_2 - \ell_1}{=} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{(M. triangular)}}{=} -\frac{1}{2} \times 2 \times (-1) \times (-2) = -2$$
$$\ell_3 + 2\,\ell_2$$

Páginas intencionalmente omitidas.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boxed{5} & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \ell_2 - \frac{2}{5}\ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-\frac{2}{5}} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \ell_3 - 5\,\ell_2 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

$$\ell_2 - \tfrac{2}{5}\ell_1 = \ell_2 + (-\tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}})\,\ell_1 \;\Rightarrow\; m_{21} = -(-\tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}) = \tfrac{2}{5}$$

$$\ell_3 - \ell_1 = \ell_3 + (-\mathbf{1})\,\ell_1 \;\Rightarrow\; m_{31} = -(-\mathbf{1}) = 1$$

$$\ell_3 - 5\,\ell_2 = \ell_3 + (-\mathbf{5})\,\ell_2 \;\Rightarrow\; m_{32} = -(-\mathbf{5}) = 5$$

A matriz $\mathbf{L}$ *é dada por*

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

Exemplo 1.32 *Determinemos, se existir, a decomposição* $\mathbf{LU}$ *da matriz* $\mathbf{C}$*.*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \ell_2 + 4\,\ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Não é possível determinar uma forma de escada da matriz $\mathbf{C}$ *sem se efetuar trocas nas linhas, pelo que* $\mathbf{C}$ *não é fatorizável, isto é, não existem* $\mathbf{L}$ *e* $\mathbf{U}$ *tais que* $\mathbf{LU} = \mathbf{C}$*.*

CAPÍTULO 2

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS: PARTE 1

2.1 Operações com Matrizes

1. Considerando as seguintes matrizes, efetue as operações **1.1** a **1.4**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.1 $2\mathbf{I} - \mathbf{A}^2$ **1.2** $\mathbf{A} - \mathbf{C}\mathbf{D}^{\intercal}$

Resolução:

1.1

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\times\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 4 \\ -5 & 17 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix},$$

então,

$$2\,\mathbf{I}-\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&-8&4\\-5&17&0\\0&-4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&8&-4\\5&-15&0\\0&4&3\end{bmatrix}.$$

1.2

$$\mathbf{C}\,\mathbf{D}^{\intercal}=\begin{bmatrix}6&-1\\1&0\\7&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&-2\\2&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&-15\\1&0&-2\\15&8&-2\end{bmatrix},$$

então,

$$\mathbf{A}-\mathbf{CD}^{\intercal}=\begin{bmatrix}1&4&2\\2&-3&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2&-15\\1&0&-2\\15&8&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&6&17\\1&-3&3\\-16&-8&1\end{bmatrix}.$$

1.3 $\dfrac{1}{2}\mathbf{DB}^{\intercal}+\mathbf{I}$. **1.4** $\mathbf{AC}+\mathbf{B}-\mathbf{D}$

Resolução:

1.3

$$\mathbf{D}\,\mathbf{B}^{\intercal}=\begin{bmatrix}1&2\\0&2\\-2&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&-1\\-5&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&4&1\\-10&4&2\\-17&6&5\end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{D}\,\mathbf{B}^{\intercal}=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}-9&4&1\\-10&4&2\\-17&6&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{9}{2}&2&\frac{1}{2}\\-5&2&1\\-\frac{17}{2}&3&\frac{5}{2}\end{bmatrix},$$

logo,

$$\frac{1}{2}\mathbf{D}\,\mathbf{B}^{\intercal}+\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-\frac{9}{2}&2&\frac{1}{2}\\-5&2&1\\-\frac{17}{2}&3&\frac{5}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{2}&2&\frac{1}{2}\\-5&3&1\\-\frac{17}{2}&3&\frac{7}{2}\end{bmatrix}.$$

Páginas intencionalmente omitidas.

Como $tr(\mathbf{B}) = 0+3+2 = 5$, temos

$$\frac{1}{tr(\mathbf{B})}\left(\mathbf{B}\mathbf{C}\,\mathbf{D}^\intercal + \mathbf{E}^\intercal\right) = \frac{1}{5}\left(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}^\intercal + \mathbf{E}^\intercal\right) = \frac{1}{5}\times\begin{bmatrix} -3 \\ -11 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{11}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

2.2 Formas de Escada e Condensada

6. Reduza cada uma das matrizes, **6.1** a **6.20**, a uma forma de escada, indicando a respetiva característica.

6.1 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **6.2** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Resolução:

6.1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\ell_3-\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \underset{\ell_3+6\,\ell_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

A matriz em forma de escada tem 3 pivots e é equivalente por linhas a $\mathbf{A}$, logo, $r(\mathbf{A}) = 3$.

6.2

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 2 & 0 \\ 8 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{\ell_2-4\,\ell_1 \\ 2\,\ell_3-\ell_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-7} & -1 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} \underset{7\,\ell_3-2\,\ell_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -54 \end{bmatrix}$$

A matriz em forma de escada tem 3 pivots e é equivalente por linhas a $\mathbf{B}$, logo, $r(\mathbf{B}) = 3$.

6.3 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **6.4** $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Resolução:

6.3

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 - 3\,\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz em forma de escada tem 2 pivots e é equivalente por linhas a $\mathbf{C}$, logo, $r(\mathbf{C}) = 2$.

6.4

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \boxed{-3} & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{3\,\ell_2 + 2\,\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz em forma de escada tem 3 pivots e é equivalente por linhas a $\mathbf{D}$, logo, $r(\mathbf{D}) = 3$.

6.5 $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **6.6** $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Resolução:

6.5

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 \leftrightarrow \ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\ell_3 + 6\,\ell_1 \\ \ell_4 + \ell_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{6} & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Páginas intencionalmente omitidas.