Sistemas Lineares

EDIÇÃO, DISTRIBUIÇÃO E VENDAS
SÍLABAS & DESAFIOS - UNIPESSOAL LDA.
NIF: 510212891
www.silabas-e-desafios.pt
info@silabas-e-desafios.pt

Sede:
Rua Dorília Carmona, nº4, 4º Dto
8000-316 Faro
Telefone/Fax: 289 805 399
Encomendas: encomendar@silabas-e-desafios.pt

TÍTULO: Sistemas Lineares

AUTOR: Margarida Carvalho

1.ª edição, 200 Exemplares

ISBN: 978-989-99114-7-5
Depósito Legal: 400621/15

Edição: Sílabas & Desafios, Unipessoal Lda.
Pré-impressão, impressão e acabamentos: Gráfica Comercial, Loulé.

Capa: Pedro Carvalho – www.overcover.pt

SÍLABAS & DESAFIOS

Sistemas Lineares

Margarida Carvalho é docente no Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa do Instituto Politécnico de Lisboa, com a categoria de Professor Adjunto.

Aos alunos,

"Não existem tarefas impossíveis
se existir persistência."

Provérbio chinês

PREFÁCIO

O objetivo deste manual é complementar o livro "*Cálculo Matricial*" [4], fazendo uma aplicação da teoria das matrizes na resolução de sistemas de equações lineares.

Sendo essencialmente prático, este livro oferece aos alunos um amplo conjunto de exercícios, todos com resolução, que lhes permitirá exercitar a aplicação de métodos na resolução de sistemas como o método de *Gauss*, a regra de *Cramer*, ou usando a inversa da matriz dos coeficientes do sistema.

No capítulo 1, é apresentado um pequeno texto que resume a teoria que relaciona os sistemas de equações lineares e matrizes. No capítulo 2, a parte prática é apresentada em grupos de exercícios, detalhadamente resolvidos.

Como pré-requisitos, os alunos deverão dominar o cálculo matricial, nomeadamente o cálculo da inversa de uma matriz, o cálculo de determinantes, bem como a aplicação de operações elementares para condensação de matrizes. Estes temas foram cuidadosamente explorados no livro acima referido. Bom estudo.

Margarida Carvalho

Novembro 2015

CONTEÚDO

1 Sistemas de Equações Lineares **1**

1.1 Definição e Representação de um Sistema 1

1.2 Solução de um Sistema 3

1.3 Resolução de um Sistema Possível 6

1.3.1 Método de Gauss na Resolução de Um Sistema . . 7

1.3.2 Matriz Inversa na Resolução de Um Sistema 10

1.3.3 Regra de Cramer 13

1.4 Discussão de um Sistema 15

1.5 Equações Matriciais 18

2 Exercícios Resolvidos **23**

Bibliografia **93**

Índice **95**

páginas intencionalmente omitidas

CAPÍTULO 2

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere o sistema de equações lineares S, com $a, b \in \mathbb{R}$, definido por:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ bx + (2-2b)y + az = 2b \\ -2x + 2y + (2a^2)z = b + 2 \end{cases}$$

1.1 Discuta, em função dos parâmetros a e b, o tipo de solução do sistema.

1.2 Determine uma solução geral do sistema para $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -2$.

1.3 Para $a = 1$ e $b = 2$, resolva o sistema pelo método de Gauss.

1.4 Considere o sistema que se obtém de S fazendo $a = b = 1$. Usando a regra de Cramer, determine o valor da variável x.

Resolução:

1.1

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}] = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ b & 2-2b & a & 2b \\ -2 & 2 & 2\,a^2 & b+2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \ell_2 - b\,\ell_1 \\ \ell_3 + 2\ell_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & a & b \\ 0 & -2 & 2\,a^2 & b+4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \ell_3 + \ell_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a & b \\ 0 & 0 & 2\,a^2+a & 2b+4 \end{array}\right]$$

A matriz está na forma de escada para todos os valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

- $2a^2 + a = 0 \;\wedge\; 2b+4 = 0 \;\Leftrightarrow\; a(2a+1) = 0 \;\wedge\; b = -2$

  $\Leftrightarrow \left(a = 0 \;\vee\; a = -\frac{1}{2}\right) \;\wedge\; b = -2$

  $\Leftrightarrow (a = 0 \;\wedge\; b = -2) \;\vee\; \left(a = -\frac{1}{2} \;\wedge\; b = -2\right)$

  Para estes valores de a e b, temos $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2$, que é inferior ao número de incógnitas do sistema, que são 3. Assim, o sistema é possível indeterminado com $g.i. = 3 - 2 = 1$.

- $\left(a = 0 \;\vee\; a = -\frac{1}{2}\right) \;\wedge\; b \neq -2$

  Neste caso, $r(\mathbf{A}) = 2 < r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$, pelo que o sistema é impossível.

- $a \neq 0 \;\wedge\; a \neq -\frac{1}{2} \;\wedge\; b \in \mathbb{R}$

  Temos $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$, que é igual ao número de incógnitas, neste caso, o sistema é possível determinado.

1.2

Fazendo $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -2$ na matriz em escada encontrada em **1.1**, temos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

o que nos conduz a

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2y - \frac{1}{2}\,z = -2 \\ 0 = 0 \text{ P.V} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ z = -2(-2 - 2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ z = 4 + 4y \end{cases}$$

Uma solução geral do sistema é

$$\mathbf{X} = [x \;\; y \;\; z]^\intercal = \begin{bmatrix} 1 + 2y & y & 4 + 4y \end{bmatrix}^\intercal,\; y \in \mathbb{R}.$$

1.3

Fazendo $a = 1$ e $b = 2$ na matriz em escada obtida em **1.1**, temos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 8 \end{array}\right] \underset{3\,\ell_2 - \ell_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{array}\right] \overset{3\,\ell_1 + \ell_2}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{array}{c} \frac{1}{3}\,\ell_1 \\ \frac{1}{6}\,\ell_2 \\ \frac{1}{3}\,\ell_3 \end{array}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right]$$

A solução do sistema é $\mathbf{X} = [x \;\; y \;\; z]^\intercal = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}^\intercal$.

páginas intencionalmente omitidas

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Anton e C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: applications version*, John Wiley & Sons, Inc., 1994.

[2] T.S. Blith e E.F. Robertson, *Basic Linear Algebra*, Springer, 1998.

[3] I. Cabral, C. Perdigão e C. Saiago, *Álgebra Linear*, Escolar Editora, 2009.

[4] M. Carvalho, H. Carvalho e T. Ferreira, *Cálculo Matricial*, Sílabas & Desafios, 2014.

[5] F. Dias Agudo, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Escolar Editora, 1989.

[6] A. Monteiro, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, McGraw-Hill, 2001.

[7] J. M. Pires dos Santos, *Tópicos de Álgebra Linear - 1.ª parte, 3.ª edição*, Associação dos Estudantes da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1997.

[8] J. M. Pires dos Santos, *Tópicos de Álgebra Linear - 2.ª parte, 1.ª edição*, Associação dos Estudantes da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1995.