CÁLCULO DIFERENCIAL A VÁRIAS VARIÁVEIS

O essencial

Paula Carvalho e Luís Descalço

SÍLABAS & DESAFIOS

EDIÇÃO, DISTRIBUIÇÃO E VENDAS
SÍLABAS & DESAFIOS - UNIPESSOAL LDA.
NIF: 510212891
www.silabas-e-desafios.pt
info@silabas-e-desafios.pt

Sede:
Rua Dorilia Carmona, nº 4, 4 Dt
8000-316 Faro
Telefone: 289805399
Fax: 289805399
Encomendas: encomendar@silabas-e-desafios.pt

TÍTULO
CÁLCULO DIFERENCIAL A VÁRIAS VARIÁVEIS – o essencial
AUTORES
Paula Carvalho e Luís Descalço

1ª edição

Copyright @ Paula Carvalho, Luís Descalço e Sílabas & Desafios, Unipessoal Lda., Agosto 2016
ISBN: 978-989-99310-8-4
Depósito legal:

Pré-edição, edição, composição gráfica e revisão: Sílabas & Desafios Unipessoal, Lda.
Pré-impressão, impressão e acabamentos: Gráfica Comercial, Loulé

Capa: Inês Godinho©2016

Reservados todos os direitos. Reprodução proibida. A utilização de todo, ou partes, do texto, figuras, quadros, ilustrações e gráficos, deverá ter a autorização expressa do autor

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este livro é um texto introdutório dos conceitos básicos de cálculo para funções de várias variáveis escrito de uma forma acessível, clara e sucinta, tornando-o um texto de apoio à lecionação e ao trabalho do estudante.

Destina-se a estudantes universitários do segundo ano de Engenharias, de Física, ou de outros cursos da área das Ciências Naturais onde o cálculo diferencial é uma das componentes importantes da sua formação. É o primeiro de um conjunto de dois livros que cobrem a generalidade dos programas de Cálculo lecionado nas universidades portuguesas. O segundo livro, dos mesmos autores, *Cálculo integral a várias variáveis, O essencial* [1], dedica-se ao cálculo integral e cálculo vetorial de funções de várias variáveis. Tem como pré-requisitos conhecimentos de cálculo diferencial de funções reais de uma variável real, usualmente adquiridos em unidades curriculares precedentes. Além disso, são também profícuos alguns conhecimentos de álgebra linear e geometria analítica.

Entendemos que, neste nível de aprendizagem, é importante que o estudante desenvolva a habilidade de calcular, com papel e lápis, mas também usando métodos computacionais. Defendemos que o uso de métodos computacionais exige que o estudante seja capaz de compreender os problemas interpretando-os num contexto geométrico e, também, que conheça os resultados teóricos e clássicos que lhe permitam fazer uma boa interpretação dos resultados obtidos por esse meio.

Pretendemos que seja um texto simples, básico e essencial. Contém uma coleção extensa de exemplos e exercícios resolvidos e, no final de cada capítulo, apresenta também uma lista de exercícios propostos. Exercícios complementares podem ser ainda encontrados em [2].

Neste contexto, embora tenha sido nossa preocupação manter o rigor matemático, foi feita uma simplificação da exposição, colocando mais enfase no cálculo do que na justificação dos resultados teóricos. Recomendamos pois, sobretudo aos estudantes mais curiosos e ambiciosos, a consulta da bibliografia indicada ([3-9]), constituída por textos clássicos, onde se podem encontrar as demonstrações omitidas, bem como algumas explicações mais profundas que são aqui preteridas.

O livro está dividido em 5 capítulos. No capítulo 1, estendem-se as noções topológicas, já conhecidas para a reta, a espaços de dimensão mais elevada. Aplicam-se os resultados, preferencialmente, às dimensões 2 (o plano) e 3 (o espaço) onde aparecem a maioria das aplicações nas áreas de Ciências e Engenharias. É um capítulo introdutório, onde se define com algum rigor, a linguagem que se usa no resto do livro.

No capítulo 2 define-se função, escalar e vetorial, de várias variáveis. Sendo este o momento do primeiro contacto dos estudantes com funções de mais do que uma variável, é dada atenção a conceitos básicos, como domínio, curvas e superfícies de nível, representação gráfica. A visualização gráfica é uma componente importante para a compreensão destes conceitos pelo que se aconselha, sempre que seja útil, o recurso a um sistema de computação para traçar os gráficos de funções de duas variáveis. O capítulo 3 tem como objetivo o estudo dos limites e continuidade de funções escalares. Além das definições, apresenta resultados que permitem calcular limites de funções quando eles existem e critérios que permitem concluir que determinado limite não existe. Os resultados são, também, estendidos a funções vetoriais.

No capítulo 4 introduzem-se as derivadas parciais e faz-se a sua interpretação geométrica. São estabelecidos critérios para que uma função seja diferenciável, refere-se a relação entre continuidade e diferenciabilidade de uma função e estuda-se o diferencial de uma função. Dá-se relevo ao teorema da derivada da função composta, à derivação de funções dadas na forma implícita e à existência de inversa.

Por fim, o capítulo 5 faz a integração de todos os conceitos estudados nos capítulos anteriores aplicando-os na resolução de problemas de otimização. Estudam-se os extremos, locais e globais, de uma função em conjuntos abertos e em conjuntos fechados, onde se usa o teorema de Weierstrass. Faz-se a apresentação e aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de extremos condicionados, nos casos mais simples.

Agradecimentos

Os autores desejam expressar o seu agradecimento ao CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia (UID/MAT/04106/2013 e SFRH/BSAB/114249/2016).

Desejam, também, agradecer aos vários colegas que consigo têm trabalhado ao longo dos anos nesta unidade curricular, uma vez que alguns dos exercícios propostos foram sendo colecionados durante esse tempo, tornando-se impossível determinar a sua autoria.

Este livro é dedicado aos nossos estudantes.

Aveiro, Agosto de 2016

Paula Carvalho

Luís Descalço

CAPÍTULO 1.

NOÇÕES TOPOLÓGICAS EM $\mathbb{R}^n$

Este capítulo tem como objetivo a generalização do conceito de intervalo aberto (em $\mathbb{R}$) a espaços de maior dimensão – os chamados **abertos** – em particular, a $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, e introduzir mais algumas noções topológicas necessárias. No final do capítulo o estudante deverá ser capaz de:

- Definir bola aberta, bola fechada, ponto interior, ponto exterior, ponto fronteiro (isolado e de acumulação);
- Indicar interior, exterior, derivado, fronteira e fecho de um conjunto no plano e no espaço;
- Classificar conjuntos de pontos em: aberto, fechado, limitado e compacto.

1.1. Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

As interpretações geométricas associadas a espaços reais de dimensão 1, 2 e 3 são a reta, o plano e o espaço tridimensional ordinário. Assumimos conhecidas as noções topológicas básicas num espaço de dimensão 1, nomeadamente, as noções de ponto interior, de interior, de ponto fronteiro e de fronteira de um subconjunto de números reais (um intervalo ou reunião de intervalos), entre outras. Uma vez que vamos considerar resultados que envolvem funções cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, em particular $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, vamos definir a terminologia que nos permite usar com rigor algumas noções topológicas em $\mathbb{R}^n$.

A **distância euclidiana** entre dois pontos (a, b) e (c, d) de $\mathbb{R}^2$ define-se por $d((a, b), (c, d)) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. Em $\mathbb{R}^n$ define-se, de modo análogo, distância euclidiana entre dois pontos por

$$d\big((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)\big) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

Uma **distância em $\mathbb{R}^n$** é qualquer função d que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $d(a, b) \geq 0$ e $d(a, a) = 0$

ii. $d(a, b) = d(b, a)$

iii. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (desigualdade triangular),

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Podem definir-se outras distâncias além da euclidiana, e um estudo mais detalhado sobre este assunto pode consultar-se, por exemplo, em [5]. Neste texto apenas vamos usar a distância euclidiana. Na reta real, no plano, ou no espaço, podemos pensar na distância euclidiana entre dois pontos como o comprimento do caminho em linha reta entre eles.

DEFINIÇÃO 1.1

A **bola aberta** no centro em $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) < r\}$, formado pelos pontos que estão à distância de *p* inferior a *r*.

Analogamente, define-se bola fechada de centro em p e raio r como sendo o conjunto $\bar{B}_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) \leq r\}$. O conjunto dos pontos que verificam $d(x, p) = r$ denota-se, habitualmente, por $S_r(p)$. Se $n = 2$ este conjunto é uma circunferência e se $n = 3$ é uma superfície esférica (de centro em p e raio r). Temos, sempre, $\bar{B}_r(p) = B_r(p) \cup S_r(p)$.