ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Maria da Graça Marcos | Marisa João Guerra Pereira de Oliveira
Alcinda Maria de Sousa Barreiras

SÍLABAS & DESAFIOS

EDIÇÃO, DISTRIBUIÇÃO E VENDAS
SÍLABAS & DESAFIOS - UNIPESSOAL LDA.
NIF: 510212891
www.silabas-e-desafios.pt
info@silabas-e-desafios.pt

Sede:
Rua Dorilia Carmona, nº 4, 4 Dt
8000-316 Faro
Telefone: 289805399
Fax: 289805399
Encomendas: encomendar@silabas-e-desafios.pt

TÍTULO
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

AUTORAS
Maria da Graça Marcos, Marisa João Guerra Pereira de Oliveira e Alcinda Maria de Sousa Barreiras

1ª. edição

ISBN: 978-989-8842-15-2

Pré-edição, edição, revisão e composição gráfica: Sílabas & Desafios Unipessoal, Lda.
Pré-impressão, impressão e acabamentos: Gráfica Comercial, Loulé

Capa: Sílabas & Desafios 2017

PREFÁCIO

Este livro tem como objetivo apoiar e auxiliar os alunos na unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica, disciplina fundamental para os estudantes de engenharia e de ciências em geral.

Os seus conteúdos resultam em grande parte da experiência das autoras no ensino desta unidade curricular nos vários cursos de Engenharia que são ministrados no Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP).

É de referir que este livro deve ser entendido como um ponto de partida para a aprendizagem desta unidade curricular, pelo que não pretende substituir a consulta de livros e outros materiais didáticos já publicados nesta área do conhecimento, muitos dos quais se encontram referenciados na bibliografia. Aliás, recomenda-se que essa bibliografia seja consultada e pesquisada, pelos alunos mais interessados e ambiciosos.

Este livro foi escrito tendo como premissa básica o ser acessível para qualquer aluno do 1º ano do ensino superior, considerando as bases matemáticas apreendidas no ensino secundário. Assim sendo, na abordagem seguida, os conteúdos teóricos são apresentados e explorados através de exemplos, permitindo ao aluno uma melhor perceção e familiarização com os conceitos. Focamo-nos no uso da teoria e das suas propriedades, optando-se por não apresentar as demonstrações matemáticas. No entanto, todas as definições e conceitos teóricos envolvidos são apresentados de uma forma rigorosa, e sempre que são introduzidos assuntos que a nossa experiência nos levou a considerar mais delicados, optou-se por uma abordagem mais detalhada e estruturada.

O livro cobre todo o espectro básico da álgebra linear, das transformações lineares e da geometria analítica. A expectativa é que o livro sirva tanto a estudantes dos cursos das áreas de engenharia, como a estudantes de outras áreas científicas, designadamente economia e ciências, já que os conteúdos apresentados focam os tópicos usualmente abordados na unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica dos diferentes cursos.

O livro encontra-se dividido em seis capítulos apresentando-se no início de cada um os objetivos delineados que indicam as competências que o aluno deve adquirir.

Ao longo de cada capítulo encontram-se exercícios que visam a aplicação imediata dos conceitos apresentados. No final do capítulo apresentam-se exercícios para a fixação global dos conceitos.

Em relação aos conteúdos propriamente ditos, é de referir que no primeiro capítulo são apresentadas as propriedades da álgebra matricial, como adição e multiplicação de matrizes, matriz inversa, transposta e matriz identidade.

O capítulo segundo é dedicado à teoria de determinantes, nomeadamente à definição, propriedades e ao Teorema de Laplace.

Os métodos para calcular o conjunto solução de sistemas de equações lineares são apresentados no terceiro capítulo. Neste capítulo é também apresentada uma metodologia que permite efetuar a discussão de sistemas onde figuram parâmetros.

O quarto capítulo inclui a definição e as propriedades de espaços vetoriais, bem como a dependência e a independência linear de vetores. São utilizadas matrizes para a determinação de uma base e para a determinação da dimensão do subespaço vetorial gerado por uma sequência de vetores.

A importância das transformações lineares, na resolução de diversos problemas de Engenharia, torna este tema importante em qualquer curso base de Álgebra Linear. O capítulo cinco inclui aspetos essenciais das transformações lineares, designadamente a definição e as suas propriedades, para além das noções de núcleo, da imagem e da matriz de uma transformação linear.

No sexto e último capítulo é iniciado o estudo a problemas fundamentais da Geometria Analítica usando conhecimentos de Álgebra Linear. São assim apresentadas as definições de produto interno e produto vetorial, através das quais se definem diversas propriedades geométricas, bem como discutidas e analisadas as representações cartesianas da reta e do plano, e as posições relativas entre duas retas, entre dois planos e entre uma reta e um plano. Apresentam-se, também, problemas métricos e não métricos, nomeadamente as distâncias e os ângulos.

Esperamos assim que esta obra seja útil a todos os alunos que frequentam, frequentaram ou pretendam vir a frequentar o ensino superior.

As autoras

CAPÍTULO 1.

MATRIZES REAIS

Neste capítulo estudamos as matrizes reais. Definimos matriz real, alguns tipos de matrizes e as suas operações e propriedades algébricas. Introduzimos o conceito de operação elementar sobre as linhas e colunas de uma matriz e calculamos a característica de uma matriz, quer pela definição quer utilizando operações elementares. Finalmente são estudadas as matrizes quadradas invertíveis, as respetivas propriedades e relaciona-se a característica da matriz com a sua regularidade.

Resultados de aprendizagem:

- Conhecer as operações básicas com matrizes, as suas propriedades e saber operar com elas.
- Definir e determinar a característica de uma matriz.
- Definir a inversa de uma matriz, saber determiná-la e conhecer as propriedades das matrizes não singulares.

1.1. CONCEITOS GERAIS

1.1.1 DEFINIÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE UMA MATRIZ

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, \mathrm{n}$.

Definição 1.1 [Matriz Real]
Chama-se matriz real do tipo $m \times n$, a todo o quadro que se obtém dispondo mn números reais segundo m linhas e n colunas.

Representação:

A matriz $\mathbf{A}$ do tipo $m \times n$, $\mathbf{A}_{m \times n}$, será representada como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

podendo também ser representada abreviadamente por

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \tag{1.2}$$

ou por

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n} \tag{1.3}$$

O elemento a_{ij} da matriz indica o elemento situado na linha i coluna *j*.

O conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ representa o conjunto de todas as matrizes com m linhas e n colunas em que todos os elementos da matriz são números reais. Uma vez que vamos apenas estudar as matrizes reais, iremos escrever simplesmente $M_{m\times n}$ para nos referirmos ao conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.1 [Definição]

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. A matriz **A** é uma matriz real do tipo 2×3 porque tem duas linhas e três colunas. Então, $\mathbf{A} \in M_{2\times 3}$. O elemento de **A** situado na linha 2 coluna 3 é o elemento $a_{23} = 6$.

1.1.2 ALGUNS TIPOS DE MATRIZES

Sejam $i, j, m, n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in M_{m\times n}$.

Definição 1.2 [Matriz Linha]

A matriz **A** diz-se matriz linha ou vetor linha se $m = 1$, isto é,

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Definição 1.3 [Matriz Coluna]

A matriz **A** diz-se matriz coluna ou vetor coluna se $n = 1$, isto é,

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Definição 1.4 [Matriz Retangular]

A matriz **A** diz-se matriz retangular se $m \neq n$.

Definição 1.5 [Matriz Quadrada]

A matriz **A** diz-se matriz quadrada se $m = n$. Nesse caso, é comum dizer-se que a matriz **A** é quadrada de ordem n e denotar-se por $\mathbf{A}_{\mathrm{n}}$.

Definição 1.6 [Diagonal Principal e Diagonal Secundária]

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem n. Chama-se diagonal principal da matriz à sequência dos elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ de **A**. Por sua vez, à sequência dos elementos a_{ij}, com $i + j = n + 1$, chama-se diagonal secundária.

Definição 1.7 [Traço de uma Matriz Quadrada]

Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$. Chama-se traço da matriz **A**, e representa-se por $tr(\mathbf{A})$, à soma dos elementos da sua diagonal principal, isto é,

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{1.6}$$

Definição 1.8 [Matriz Diagonal]

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem n. A matriz diz-se diagonal quando todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são iguais a zero, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Definição 1.9 [Matriz Triangular Superior]

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem n. A matriz diz-se triangular superior quando todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Definição 1.10 [Matriz Triangular Inferior]

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem n. A matriz diz-se triangular inferior quando todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Definição 1.11 [Matriz Nula]

A matriz $\mathbf{A}$ diz-se matriz nula e representa-se por $\mathbf{O}_{m\times n}$, se todos os seus elementos são nulos, isto é,

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Definição 1.12 [Matriz Identidade de ordem n]

A matriz $\mathbf{A}$ diz-se matriz identidade de ordem n e representa-se por $\mathbf{I}_n$, se é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é,

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Definição 1.13 [Matrizes do mesmo tipo]

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes. As matrizes dizem-se do mesmo tipo se têm igual número de linhas e de colunas.

Definição 1.14 [Elementos homólogos]

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes do mesmo tipo. Os elementos homólogos das duas matrizes são os elementos que ocupam a mesma posição nas duas matrizes.

Definição 1.15 [Matrizes iguais]

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes do mesmo tipo. As matrizes dizem-se iguais se todos os elementos homólogos são iguais.

Definição 1.16 [Matriz transposta A^T de A]

Chama-se matriz transposta da matriz $\mathbf{A}$ à matriz $\mathbf{A}^T = [b_{ij}] \in M_{n\times m}$ em que $b_{ij} = a_{ji}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

Exemplo 1.2 [Matriz transposta]

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$. Então, trocando as linhas com as colunas na matriz $\mathbf{A}$ obtemos a matriz $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}$.